

Задача 4.15

Смирнова Эльза, 307 группа

Условие задачи

- Вычислить спектр сигнала $\xi(t) = a \frac{t}{t_0} \exp(-\frac{\pi t^2}{t_0^2})$.
- Представить графически сигнал $\xi(t)$ в зависимости от параметра t_0 , характеризующего его длительность, и спектр $S(\omega)$ сигнала в зависимости от параметра t_0^{-1} , характеризующего ширину его спектра.
- Проанализировать и построить в том же масштабе сигнал и спектр для импульсов при увеличении и уменьшении параметра t_0 в два и десять раз.

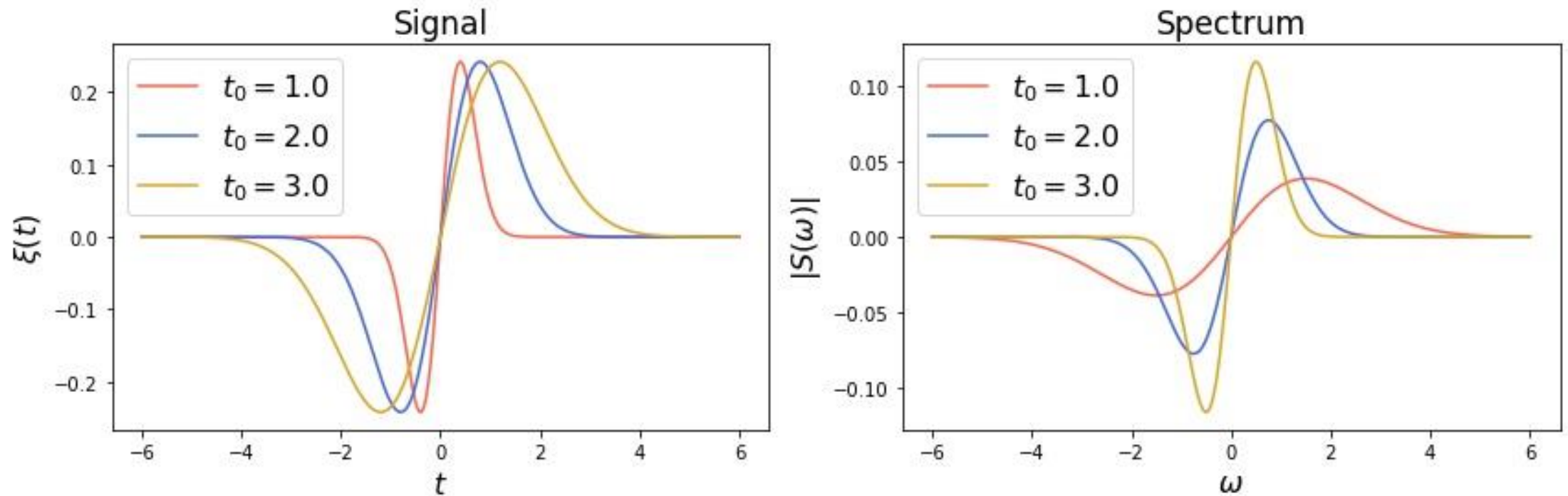
Вычисление спектра сигнала

- $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a \frac{t}{t_0} e^{-\frac{\pi t^2}{t_0^2}} e^{-i\omega t} dt =$
- Преобразуем степени при экспонентах и сделаем замену $z = t + \frac{i\omega t_0^2}{2\pi}$, $dz = dt$
- $= \frac{a}{2\pi t_0} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z - \frac{i\omega t_0^2}{2\pi} \right) e^{-\frac{\pi}{t_0^2} z^2} dz = \frac{a}{2\pi t_0} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} * \left(\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{\pi}{t_0^2} z^2} dz - \frac{i\omega t_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{t_0^2} z^2} dz \right) =$
- Первый интеграл в скобке равен 0 как интеграл от произведения четной функции на нечетную в симметричных пределах.

Вычисление спектра сигнала

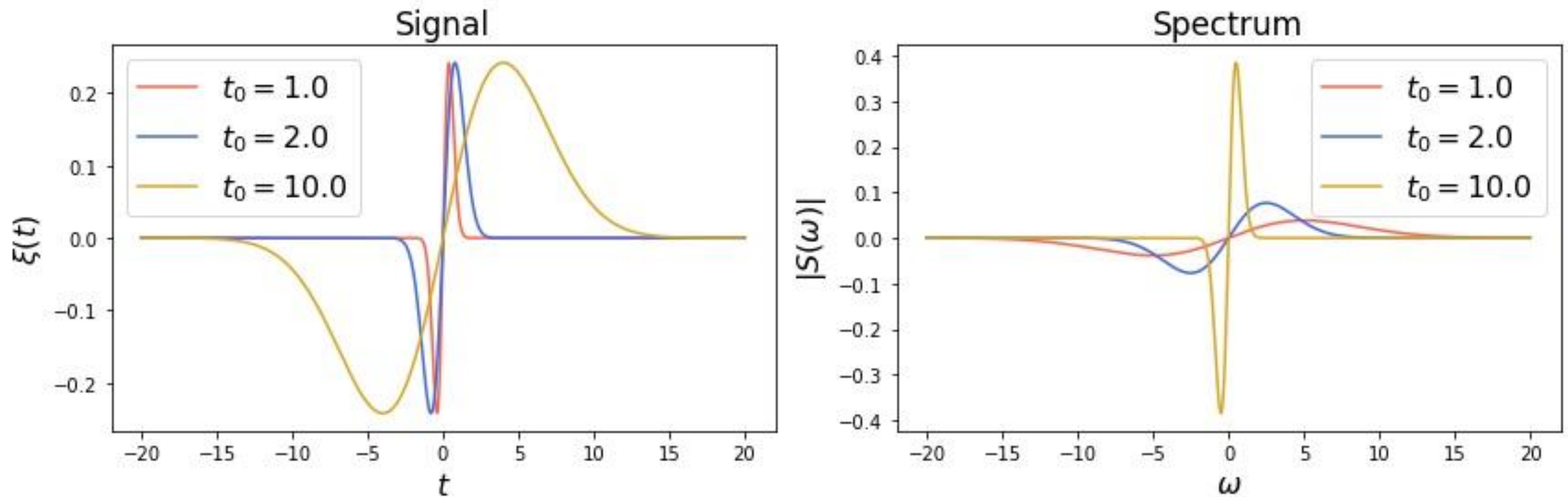
- Вычислим второй интеграл в скобке, сделав замену $p = \frac{\sqrt{\pi}}{t_0} z$, $dp = \frac{\sqrt{\pi}}{t_0} dz$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{t_0^2} z^2} dz = \frac{t_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = \frac{t_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = t_0$
- Вернемся к вычислению спектра
- $S(\omega) = -\frac{a}{2\pi t_0} e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}} \frac{i\omega t_0^2}{2\pi} t_0 = -\frac{i}{4\pi^2} a\omega t_0^2 e^{-\frac{\omega^2 t_0^2}{4\pi}}$

Графики сигнала и спектра



Графики сигнала и спектра

- Параметр t_0 увеличен в 2 и 10 раз.



Графики сигнала и спектра

- Параметр t_0 уменьшен в 2 и 10 раз.

